1967 г. январь — февраль *т. XXII, вып. 1 (133)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 92.5

МОЛОДОСТЬ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

Л. А. Люстерник

В 61-м году я по состоянию здоровья был некоторое время оторван от обычной работы. Тогда я написал (сначала мысленно) свои воспоминания, которые озаглавил «Молодость Московской математической школы», относящиеся к началу двадцатых годов — «периоду Лузитании» и отчасти к их середине, что названо здесь условно «периодом Постлузитании» [1]). Когда говорят о математике рассматриваемого периода, то под «Московской математической школой» понимают часто не всю московскую математику, а то, что следовало бы назвать Московской теоретико-множественной школой,— школу теории функций и отпочковавшиеся от нее школы и направления. Эта Московская школа в узком смысле переживала тогда свою молодость, и это совпадало с физической молодостью большинства входивших в нее математиков. Быстрый рост этой школы, явившейся основной базой развития московской математики, начался в трудных условиях начала 20-х годов. Он привел к тому, что Москва к их концу стала впервые крупнейшим в международном масштабе математическим центром. Это была несомненно яркая страница в истории советской культуры. Итоги научной работы этого периода подведены под свежим впечатлением — в юбилейных сборниках к X-летию и XV-летию революции, и ретроспективно — в позднейших сборниках. Но поскольку осталось не так уже много тех, кто непосредственно «изнутри» наблюдал этот процесс раннего развития Московской математической школы, я позволил себе опубликовать этот материал. Всякое воспоминание поневоле субъективно — не все видишь, не все припоминаешь, и людей иногда видишь со стороны не наиболее характерной и интересной. Далее мы знаем последующие судьбы людей и их взаимоотношений, судьбы научных школ и направлений, мероприятий и т. д., и трудно бывает отвлечься от этой апостериорной информации. В картинах китайских и японских мастеров часто отдельные фрагменты изображаются детально, остальное воспринимается как фон. Так и память, отдельные эпизоды, иногда второстепенные, воспроизводит ярко, остальное — в виде «фона».

Мы не придерживались хронологического порядка. Иногда делали экскурсии вперед по времени, иногда назад. Одна большая экскурсия назад

[1]) Фрагмент из этих воспоминаний был опубликован в УМН XX, вып. 3 (1965), 21—30.

превратилась в приводимый сейчас очерк «Страницы из истории математики», выпадающий из рамок воспоминаний. Мы позволили себе включить его в качестве историко-математического введения к ним.

Добавим, что личные воспоминания автора дополняются иногда рассказами других лиц.

1. Страницы из истории математики

1. Тригонометрические ряды и основные понятия анализа. Это историческое отступление должно рассказать о том, как сложилась «математическая ситуация» второго десятилетия XX века, когда начала формироваться Московская теоретико-множественная школа. «Необъятного никто объять не может». Поэтому мне придется ограничиться односторонним описанием, взглянув на прошлое глазами математика двадцатых годов, который видел расцвет в Москве школы теории функций, рождение и развитие топологической школы, первых ласточек школы функционального анализа, начала работы в более классических областях математики на базе этих, тогда еще молодых математических дисциплин. Иногда, заглядывая в прошлое, мы видели корни отдельных направлений сегодняшней работы более глубоко. Так, в теории тригонометрических рядов — любимой теме московских математиков в период формирования нашей школы — существовала со времен Римана традиция начинать изложение с задачи о звучащей струне. В большинстве случаев мы знали лишь своих более близких научных предков.

Мы начнем поэтому изложение с нескольких страниц истории тригонометрических рядов.

В математике бывают задачи, приводившие к «возвращению к основам данной науки» (выражение Лобачевского), например, задача о доказательстве V постулата в геометрии. В анализе неоднократно играла такую роль теория тригонометрических рядов (это еще соображение, чтобы начать именно с нее). Как известно, эта задача сыграла роль в оформлении современного понятия функциональной зависимости, обобщении понятия интеграла, имела отношение к возникновению теории множеств (было бы интересно проследить с аналогичной точки зрения и некоторые другие задачи).

Первым аналитическим аппаратом изображения функций были степенные ряды, и анализ вначале имел дело лишь с функциями, разлагаемыми в такие ряды (мы сейчас называем такие функции аналитическими). Они обладают рядом замечательных свойств: так, в классе аналитических функций функция, заданная на каком-нибудь интервале, однозначно определяется своими значениями на частичном интервале — это свойство однозначности продолжения Л. Эйлер иногда называл «непрерывностью». Те операции, с которыми имели дело тогда математики,— алгебраические, суперпозиция и обращение, дифференцирование и интегрирование, решение обыкновенных дифференциальных уравнений — выполнялись в пределах этого класса функций.

Положение изменилось, когда начала складываться «математическая физика», стали изучаться процессы, выраженные уравнениями в частных производных «гиперболического типа», допускающие неаналитические решения. С ними вошли в математику и функции более общего характера и аналитический аппарат для их изображения.

В 40-х годах XVIII века математика встретилась впервые с подобного рода задачей —«о звучащей струне». Пусть струна в состоянии равновесия занимает положение отрезка $[0, \pi]$ оси x, а $y(x, t)$ — отклонение точки x этой оси от самой оси в момент t. Колебания струны выразятся уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Предполагая струну закрепленной в точках 0 и π оси x, мы найдем частные решения (1) : $y = \sin nx \sin nat$, $\sin nx \cos nat$ типа «стоячих волн». (При $n = 1$ они отвечают «основному тону» струны, при $n > 1$ — обертонам.) Даниил Бернулли, предполагая, что общее решение уравнения (1) есть суперпозиция частных решений типа стоячих волн, получил его в виде:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx \cos nat + c_n \sin nx \sin nat). \tag{2}$$

Возник вопрос, является ли это решение общим? Пусть линия $y = f(x)$ — положение струны в начальный момент $t = 0$. Тогда из (2) мы получили бы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{3}$$

Так возникла задача о представлении «произвольной» функции в виде тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4}$$

частным случаем которого является ряд (3). Заметим, что функция $f(x)$, изображающая начальное положение, является, вообще говоря, не «непрерывной» в указанном выше смысле, а изображается «произвольной нарисованной от руки линией». Нарисовав ее для части отрезка $[0, \pi]$, мы можем ее бесконечным множеством способов продолжать на весь отрезок. Казалось, такую функцию невозможно изобразить «одним аналитическим выражением», каким является тригонометрический ряд.

Возникшая по этому поводу дискуссия, в которой участвовали крупнейшие математики XVIII века, способствовала расширению и уточнению понятия функции.

В 1809 г. Фурье опубликовал доказательство того, что «произвольная функция» с периодом 2π разлагается в тригонометрический ряд вида (4). Доказательство не было полным. Но Фурье на целом ряде примеров показал, что функции, даже имеющие разрывы, могут представляться такими рядами, и убедил математиков в справедливости подобного утверждения. Этим самым открылась широкая дорога применению тригонометрических рядов и их обобщению — ортогональных рядов в развивающейся математической физике.

Изображение коэффициентов ряда (4) через сумму этого ряда:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \tag{5}$$

было известно еще Эйлеру, но за выражаемыми по формуле (5) коэффициентами осталось название «коэффициентов Фурье» для функции $f(x)$, а за рядом (4) с такими коэффициентами —«ряда Фурье» этой функции.

В работе Дирихле и Лобачевского по тригонометрическим рядам уже появилось современное понятие функции $y = f(x)$ как *произвольного* соотношения между значениями x и отвечающими им значениями y. При такой широкой точке зрения на понятие функции появилась задача найти по возможности более широкие достаточные условия равенства функции $f(x)$ сумме ее тригонометрического ряда Фурье. В 1829 г. появилось первое строго проведенное доказательство Дирихле справедливости такого равенства при сравнительно широких достаточных условиях. Позже эти условия были расширены рядом авторов.

Но если сумма $f(x)$ ряда (4) может быть разрывной, то какой смысл нужно придавать интегралам в формулах (5), когда интеграл был определен лишь для непрерывных функций? Так возникла проблема «интеграла и тригонометрического ряда»— проблема «воссоздания коэффициентов ряда (4) по его сумме» (как ее определил Лузин). Она привела к созданию новых все более общих понятий интеграла, которые «действовали» во все более широких классах разрывных функций и придавали все более широкий смысл формулам (5) для коэффициентов Фурье.

Эта проблема была фактически поставлена в классическом мемуаре Римана.

Сейчас, когда отмечается столетие со дня кончины этого великого математика, уместно вспомнить следующее: Римана с его безудержным полетом математической фантазии часто противопоставляют Вейерштрассу с его критическим умом. Но гений Римана многогранен: в своем мемуаре по теории тригонометрических рядов (он был представлен в 1853 г. в геттингенский университет в качестве «Habilitationschrift»—«второй диссертации») Риман выступает в качестве одного из основоположников критического направления математики второй половины XIX века и предшественника теории функций действительного переменного. Мемуар начинается с истории вопроса о представлении функций тригонометрическими рядами, начиная с 1753 г.,— с задачи о струне. Риман рассказывает со слов Дирихле такой, например, эпизод: когда Фурье в декабре 1806 г. рассказывал о своей теореме, то «это утверждение для маститого Лагранжа было столь неожиданным, что он выступил с самыми решительными возражениями». Рассказывая о том, что Дирихле различал «абсолютную» и «условную» (по позднейшей терминологии) сходимость, Риман попутно доказывает «теорему Римана» о влиянии перестановок членов на сумму ряда.

Полагая, что «условию Дирихле» удовлетворяют все функции, могущие найти применение в физике, Риман считает «заслуживающими внимания случаи, не рассмотренные Дирихле. Во-первых, как указывал сам Дирихле в заключение своей работы, этот вопрос стоит в теснейшей связи с основными принципами исчисления бесконечно малых и может служить для того, чтобы привести эти принципы в состояние большей ясности и определенности. С этой точки зрения исследование упомянутых случаев представляет определенный интерес». Во-вторых, эти случаи могут представлять интерес для теории чисел.

Излагая «условия Дирихле», Риман заменяет требование конечности числа точек разрыва требованием интегрируемости.

Далее следует классическое определение «интеграла Римана» и необходимое и достаточное условие интегрируемости в этом смысле ограничений функции. (Для неограниченных функций интегрируемость понимается в смысле «несобственных интегралов».) Дается пример интегрируемой функции с всюду плотным множеством точек разрыва (при построении подобных примеров используется «сгущение особенностей»).

Рассматривая произвольный тригонометрический ряд (4), у которого $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, Риман строит ряд, полученный из него двукратным почленным интегрированием. Доказательство сходимости этого ряда и непрерывности его суммы $F(x)$ содержит по существу основы теории равномерно сходящихся рядов. Вводя понятие второй обобщенной производной $\overline{F}''(x)$ [1], Риман доказывает, что по всякой точке x, для которой ряд (4) сходится, его сумма $f(x) = \overline{F}''(x)$. Это позволяет ему найти необходимые и достаточные условия того, чтобы произвольная функция $f(x)$ была суммой тригонометрического ряда,— она должна быть второй обобщенной производной некоторой непрерывной функции и удовлетворять дополнительным условиям. Доказывая, что ограниченная интегрируемая функция имеет стремящиеся к нулю коэффициенты Фурье, Риман строит пример интегрируемой (неограниченной) функции с неограниченно растущими коэффициентами Фурье и т. д. Риман является здесь предшественником теории функций не только по общности задач, которые он ставит и решает, но и по стилю изложения, характеру доказательств, мастерству построения «неожиданных» примеров.

Обобщению подверглось и понятие сходимости функционального ряда. Самым логически простым видом сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ является сходимость к каждой точке x. Как показал Дюбуа Раймонд, даже для непрерывной функции ее ряд Фурье может не быть сходящимся к ней в каждой точке. Гораздо более тесно связан с тригонометрическими (и, общée, с ортогональными) рядами другой вид сходимости — в среднем.

Назовем среднеквадратическим отклонением функции $f(x)$ от $\varphi(x)$ на $[a, b]$ выражение

$$\sqrt{\int\limits_a^b (f-\varphi)^2\,dx}\,.$$

[1] Которой присвоено имя Шварца.

Из всех тригонометрических многочленов степени m

$$\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)$$

наименьшее среднеквадратическое отклонение от $f(x)$ на отрезке $(0, 2\pi)$ имеет отрезок $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ (теорема Бесселя).

Сходимость в среднем последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на $[a, b]$ означает стремление к нулю среднеквадратических отклонений f_n от f на $[a, b]$ при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f-f_n)^2\,dx=0.$$

Сходимость в среднем к функции $f(x)$ ее тригонометрического ряда Фурье (4) на $[0, 2\pi]$ эквивалентна так называемому равенству Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2). \tag{6}$$

А. А. Ляпунов доказал в 1894 г. равенство Парсеваля, а значит, и сходимость в среднем рядов Фурье не только для непрерывных функций $f(x)$, но и для разрывных, но «с интегрируемыми квадратами», для которых существует конечный интеграл Римана $\int\limits_0^{2\pi} f^2dx<\infty$.

Тригонометрические ряды возникли при решении задачи о струне. Более сложные задачи колебаний привели к более общим «ортогональным рядам». Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nu_n(x)$ называется ортогональным на $[a, b]$, если u_n и u_m при $n\neq m$ ортогональны на $[a, b]$:

$$\int_a^b u_nu_m\,dx=0.$$

Тригонометрические ряды являются частным случаем ортогональных которые возникли, в частности, при решении задач о колебаниях, более общих, чем колебания струны. Система функций $(u_n(x);\ n=1, 2, \ldots)$ называлась ортогональной на (a, b) с весом $\rho(x)>0$, если $\int\limits_a^b u_nu_m\rho dx=0$ при $n\neq m$ (для тригонометрических рядов $a=0$, $b=2\pi$, $\rho\equiv 1$).

На ортогональные ряды распространяются такие понятия, как коэффициенты и ряды Фурье, теорема о наилучшем квадратическом приближении (с весом) отрезков ряда Фурье, эквивалентность аналога равенства Парсеваля с весом сходимости в среднем к функции ее ряда Фурье.

Особо следует отметить роль Петербургской школы в развитии ортогональных систем. В работе «О непрерывных дробях» (1855 г.) Чебышёв решает задачу интерполирования по методу наименьших квадратов с помощью многочленов ($P_k(x)$; $k = 1, 2, \ldots, N$), ортогональных «в N точках x_i ($i = 1, 2, \ldots, N$), с весом $\rho(x) > 0$, для которых $\sum_{i=1}^{N} P_k(x_i) P_l(x_i) \rho(x_i) = 0$ при $k \neq l$».

Далее Чебышёв переходит к ортогональным в «интегральном смысле» многочленам, строит общую их теорию и вводит ряд специальных классов ортогональных многочленов.

Заметим, что Чебышёв еще до Стилтьеса объединяет случаи суммирования и интегрирования символом $\int F$. В заметке «Об интерполировании величин, доставленных наблюдениями» (1858 г.) Чебышёв приводит пример биортогональных последовательностей, позже А. А. Марков строит целый класс таких систем. Они связаны с задачами приближения функций в смысле того, что позже было названо «метрикой L». Отдельные классы ортогональных систем многочленов и функций изучали Сонин, Сохоцкий, Ляпунов и др.

В. А. Стеклов, продолжая указанные выше исследования Ляпунова, ввел понятие «замкнутых» систем ортогональных функций, для которых имеет место равенство Парсеваля и представимость по таким функциям в смысле сходимости в среднем. В. А. Стеклов доказал замкнутость указанных выше ортогональных систем математической физики.

Часто «ультраклассическая» Петербургская школа противопоставлялась тем направлениям математики XX века, о которых идет здесь речь. В то же время, как мы видим, эта школа сыграла большую роль в предыстории таких направлений.

2. Возникновение теории множеств. В 1870—1874 гг. появились работы по теории тригонометрических рядов Г. Кантора, будущего основоположника теории множеств. Г. Кантор (1845—1919), ученик Кронекера, в своих первых работах — арифметических — выступает как представитель «классических» тенденций тогдашней математики. Отправляясь от мемуара Римана, Г. Кантор доказывает теорему единственности тригонометрических рядов: *если сумма $f(x)$ ряда* (4) *есть тождественный нуль*, $f(x) \equiv 0$, *то ряд есть нулевой*:

$$a_0 = a_1 = b_1 = \ldots = a_n = b_n = \ldots = 0.$$

Далее Кантор доказал, что теорема остается справедливой, *если* $f(x) = 0$ *всюду на периоде* $[0, 2\pi]$, *кроме конечного числа точек*. Естественно возник вопрос: как обстоит дело, если $f(x) = 0$ всюду на $[0, 2\pi]$, кроме исключительного, но уже бесконечного множества точек K. Эта задача приводит к необходимости классифицировать такие множества, она и привела Г. Кантора к созданию теории линейных точечных множеств (т. е. множеств вещественных чисел). Согласно теперешней терминологии будем называть множество K точек (вещественных чисел) на отрезке $[0, 2\pi]$ *U-множеством* (Unicite' — единственность) или *множеством единственности*, если не существует никакого тригонометрического ряда (1), кроме нуль-ряда, для которого его сумма $f(x) = 0$ всюду на $[0, 2\pi]$ вне K; в противном случае назовем K *M-множеством* (*множественности*). Легко убедиться, что любой отрезок $[a, b]$ — часть $[0, 2\pi]$ есть M-множество. Кантор обнаружил существование и бесконечных U-множеств. Это потребовало от него первых шагов в области теории точечных множеств.

Свою работу 1872 г. «О тригонометрических рядах» Кантор начинает с построения теории вещественных чисел («теория Кантора», основанная на фундаментальных последовательностях); далее он замечает, что установление взаимно однозначного соответствия между вещественными числами и точками прямой требует особой аксиомы (аксиома полноты). Рассматривая множества вещественных чисел (точек), он вводит — на основании своего определения этих чисел — понятие *предельной точки* множества (точки сгущения); далее, понятие *производной* K' множества K — *множества всех точек, предельных для* K, и производных высших порядков: $K'' = (K')'$, . . . , $K^{(p)}$, . . . , где $K^{(p+1)} = (K^{(p)})'$, причем при $p \geqslant 1$, $K^{(p+1)}$ содержит $K^{(p)}$. Для конечного множества точек K предельных точек нет, $K' = 0$. Кантор исследует структуру множеств K, для которых $K^{(n)} = 0$, при любом конечном значении n и доказывает, что *все они являются U-множествами.*

Именно этот мемуар 1872 г. по тригонометрическим рядам и был первым мемуаром Г. Кантора по теории точечных множеств, а она его привела к общей теории множеств. Уже в статье 1874 г. «Об одном свойстве понятия всех вещественных алгебраических чисел» Кантор доказывает теорему: *для любой последовательности вещественных чисел можно строить вещественное число, ей не принадлежащее.* Располагая все вещественные алгебраические числа в последовательность, он получает новое доказательство существования неалгебраических (трансцендентных) чисел.

Это приводит к его классификации бесконечных точечных множеств по «мощностям» (1878 г.). Два множества называются *эквивалентными*, если между их элементами можно установить *взаимно однозначное соответствие.* Всем эквивалентным между собой множествам относится одна «*мощность*»— кардинальное число. Мощность конечного множества — это число его элементов. Далее все множества, эквивалентные множествам натуральных чисел $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$ (а поэтому располагаемые в виде последовательности) называются «*счетными*» и им всем приписывается общая мощность — *счетная* или *алеф-нуль*». Примеры счетных множеств: множество всех рациональных чисел; всех алгебраических чисел; все ранее введенные множества K, для которых $K^{(n)} = 0$. Но из вышеуказанной теоремы 1874 г. следует, что *множество всех вещественных чисел есть несчетное.* Его мощность Кантор называет «*континуумом*» или «алеф» (мощность C). Вопрос о том, существуют ли точечные множества других мощностей, составляет содержание *континуум-проблемы Кантора.*

Мощность континуума имеет множество точек любого отрезка, любого «совершенного множества» P на прямой (для которого $P' = P$). *Эту же* *мощность имеют и кубы n измерений* и сами n-мерные координатные пространства при любом числе n.

Кантор далее обнаружил, что вышеуказанный процесс образований производных $P^{(n)}$ множества P для любого конечного порядка $n = 1, 2, 3, \ldots$ можно продолжать «трансфинитно». Обозначим через $P^{(\omega)}$ (производная порядка «ω»— первого «трансфинитного» порядка) пересечение всех $P^{(n)}$ для любых конечных n. Далее $P^{(\omega+1)} = (P^{(\omega)})'$ и так строим $P^{(\omega+2)}, \ldots$ $\ldots, P^{(2\omega)}, \ldots$ Здесь Кантор впервые ввел *трансфинитный* процесс и отсюда пришел к теории *трансфинитных порядковых чисел.*

Необычайным взлетом творческой математической фантазии Кантор в короткий срок (1874—1884 гг.) строит основы теории линейных точечных множеств и общей теории множеств.

Творчество Кантора было «философским»: он вводил новые весьма общие понятия — такие, как «множество», «эквивалентность», «мощность», «порядок»,— эти понятия «работали». Но ему пришлось пережить драму новатора, не встречающего признания. Его учитель Л. Кронекер, стоящий на финитной точке зрения, пользовавшийся огромным авторитетом — не только в Германии, занял по отношению к теории Кантора резко отрицательную позицию, и ее разделили многие тогдашние авторитетные математики, например, товарищ Г. Кантора Шварц. Не случайно в статьях Г. Кантора звучали патетические строки в защиту свободы математического творчества от метафизических предубеждений. «Смысл математики в ее свободе». В биографии Кантора (в собрании его сочинений) сказано, что он, отстаивая свободу и независимость математического творчества и выступая против чрезмерного влияния отдельных ученых, явился одним из инициаторов создания математического общества Германии (Deutsche Mathematiker-vereinigung) и был его первым председателем.

К счастью для науки, противники работ Кантора при всем их заслуженном авторитете и влиянии не обладали монополией: Кантор имел возможность работать и публиковать свои труды. (Напомним, что, к счастью для науки, и противники Лобачевского при всем их авторитете и влиянии не обладали монополией: он имел независимую от них базу в Казани.)

Напряженная работа в условиях борьбы за признание, возможно, содействовала тому приступу психического заболевания, которое впервые постигло Кантора в 1884 г., от которого он тогда вскоре оправился, но уже с ослабленной работоспособностью.

Между тем наступала пора признания. С самого начала теорию Кантора поддерживал Дедекинд, самостоятельно пришедший к некоторым идеям теории множеств. Вейерштрасс, сначала встретивший ее отрицательно, изменил свое отношение (как позже и Эрмит под влиянием своего ученика А. Пуанкаре). Внешним выражением признания заслуг Кантора было его избрание почетным членом Лондонского и Харьковского математических обществ (в 1901 г.), а затем и других научных организаций.

Идеи Кантора приняли на вооружение такие крупнейшие математики следующих поколений, как А. Пуанкаре, Д. Гильберт, Г. Минковский, Ж. Адамар, А. Лебег и др.

Начинается быстрое проникновение теории множеств во все области математики, на ее базе возникают новые математические дисциплины — теория функций действительного переменного, топология, функциональный анализ, математическая логика, общая алгебра и т. д.

В 1915 г. предполагалось организовать международное чествование 70-летия Г. Кантора. Этому помешала война. Он умер в 1919 г. в психиатрической больнице.

3. Возникновение и развитие теории функций. Возвращение к основам анализа во второй половине XIX в., о котором мы говорили, выяснило, в частности, объем основных понятий анализа. Он оказался шире, чем объем связываемых с ними «наглядных представлений». Наглядные представления, например, о сходящейся последовательности функций отвечают не логически простому понятию сходимости в каждой точке, а более узкому — равномерной сходимости.

Понятие непрерывной функции возникло, быть может, как модель механических процессов, и требование однозначной продолжаемости отражало их детерминистический характер. Но и более широкий класс «произвольно нарисованных линий» тоже содержит элемент движения, и ему, должно быть, соответствовал класс кусочно-гладких функций. Логически же простое определение Коши непрерывной функции оказалось значительно шире, чем связываемые с ней в то время наглядные представления; это и выяснил пример Вейерштрасса нигде не дифференцируемой непрерывной функции. (Впоследствии у Винера такие функции стали моделью более сложных процессов типа броуновского движения.) «Анализ основных понятий анализа» сопровождался поэтому построением «парадоксальных» с первого взгляда примеров того, что называли «музеем математических ужасов». Противоречие между широтой объема логически простых понятий анализа и относительной узостью моделируемых ими наглядных представлений есть источник общеизвестных трудностей при прохождении курса анализа. Но именно эта широта определила возможность перенести такие понятия на более широкие объекты, чем «обычные» функции числового аргумента (см. ниже).

Во второй половине XIX в. начала складываться новая дисциплина — *теория функций действительного переменного*, изучавшая общие понятия анализа — предельный переход, непрерывность, операции дифференцирования и интегрирования; важнейшие аналитические выражения — как тригонометрические и ортогональные ряды, системы многочленов — и классы функций, ими изображаемые. Так теоремы Вейерштрасса выяснили, что класс непрерывных функций совпадает с классом изображаемых равномерно сходящимися последовательностями многочленов.

Конечно, теория функций формировалась на базе не только тригонометрических рядов, но всех разделов анализа.

В качестве примера приведу круг вопросов, связанных с «принципом Дирихле» (по терминологии Римана) — постулирования существования гармонической в области Q функции, с заданными значениями на границе, как функции, реализирующей минимум функционала $J(u) = \iint\limits_{Q} (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy$ при заданных условиях [1]. Такое постулирование встречается у Гаусса в работах по теории потенциала, В. Томсона, Дирихле. Риман при доказательстве основных теорем теории аналитических функций пользуется «принципом Дирихле» и его аналогами, но в отличие от предшественников приводит соображения для оправдания такого принципа. В 1863 г. Вейерштрасс критикует постулирование существования минимума вариационных задач, приводя пример задачи, для которой минимум не достигался. По словам Клейна, Риман, признавая правоту критики Вейерштрасса, продолжал верить в правильность «принципа Дирихле». Критика Вейерштрасса направила Шварца и Неймана на успешные поиски невариационного обоснования теорем Римана. Вейерштрасс в введении к своему курсу вариационного исчисления указал на недопустимость некритического постулирования существования минимума и для функций конечного числа переменных — на таком постулировании основано одно из доказательств V постулата Евклида. Вейерштрасс доказывает существование минимума непрерывной функции на отрезке — оно опирается на то свойство отрезка, которое мы называем *компактностью* — возможность выбрать сходящуюся последовательность из всякой последовательности точек отрезка (для всей прямой не имеет места свойство компактности и минимум непрерывной функции на ней может не достигаться).

В 1897 г. появилась работа Арцела о «принципе выбора» для непрерывных функций (условиях компактности систем таких функций в смысле равномерной сходимости). Это было связано с его попыткой обосновать принцип Дирихле. Наконец, в 1901 г. Гильберт доказал существование решений целого класса вариационных задач, опираясь на свойства компактности «минимизирующих последовательностей для них». Он дал вариационное обоснование и принципа Дирихле и теорем Римана, открыв широкую дорогу вариационным методам теории дифференциальных уравнений.

Понятие компактности стало одним из основных в теории функций, топологии, а после работ Гильберта по теории линейных операторов — и в функциональном анализе.

Другой пример — появление в работах Стилтьеса по «проблеме моментов» в 1895 г. названного его именем интеграла. Интеграл Стилтьеса — обобщение интеграла Римана — объемлет и алгебраическую операцию конечного суммирования и предельные для нее операции анализа — обычное интегрирование, суммирование рядов и т. п. Стилтьес переходил к пределу в названной работе от алгебраической задачи к задаче анализа; интеграл Стилтьеса оказался аппаратом, удобным для такого предельного перехода.

Мы уже видели, что задачи теории функций привели Кантора к созданию теории множеств, а последняя нашла (еще у Кантора) свои первые приложения именно к теории функций.

---

[1] С. С. Петрова, О принципе Дирихле, История и методология естественных наук 5 (1966).

Теория функций действительного переменного (к которой относят и теорию линейных точечных множеств) получила свое окончательное оформление в начале XX века в ставших классическими трудах французских математиков — Анри Лебега, Рене Бэра, Эмиля Бореля.

В теории линейных точечных множеств после работ Кантора крупным событием было введение в 1902 г. *меры Лебега* точечного множества, обобщающей понятие длины отрезка (заметим, что в числе предшествовавших мероопределений было и мероопределение Кантора, данное сразу для n-мерного случая). Преимуществом мероопределения Лебега явилась его общность — ни одна конструкция не приводила к неизмеримому по Лебегу множеству; с другой стороны,— его логическая простота. Аксиоматика меры Лебега чрезвычайно проста. Это позволило впоследствии ее обобщить на множества самой разнообразной природы.

Среди измеримых точечных множеств особо выделим *множества меры* 0 — все конечные и счетные, а также некоторые контитуальные (примером его служит множество тех вещественных чисел, в десятичном представлении которых ни разу не появляется какая-нибудь цифра, например, 8). При интеграции можно пренебречь значениями функций на множестве меры 0. Если свойство A имеет место для всех точек, кроме принадлежащих множеству меры 0, мы говорим: оно имеет место *почти всюду*. Например, пусть $\alpha_n(x)$ — число появлений цифры 7 среди первых n цифр десятичного разложения числа x. Имеем: почти всюду $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n(x)}{n}=\frac{1}{10}$.

Мы называем *метрической* теорией функции ту ее часть, которая связана с понятием меры,— сюда относится теория интегрирования, сходимости почти всюду и других свойств «почти всюду», сходимости в среднем и т. п.

Каждая функция $f(x)$ преобразует множества на оси x в множества оси y. *Функция $f(x)$ называется измеримой по Лебегу, если прообраз любого отрезка $[a, b]$ оси, т. е. множество точек x, для которых $a \leqslant f(x) \leqslant b$, измерим.*

Здесь мы встречаемся с соответствием между классами функций $f(x)$ и классами точечных множеств. Классу K таких множеств отвечает класс $\widetilde{K}$ тех функций $f(x)$, для которых прообразы отрезков оси y суть множества класса K оси x.

Одновременно с мероопределениями Лебега появился и *интеграл Лебега*, более общий, чем интеграл Римана. Грубо говоря, если с интегралом Римана мы связываем разбиения отрезка интегрирования на интервалы, то для интеграла Лебега мы аналогично используем его разбиения на произвольные измеримые множества. Аксиоматика интеграла Лебега также весьма проста, проще аксиоматики интеграла Римана; эта логическая простота позволила перенести позже на функции, определенные на множестве общей природы, понятие интеграла Лебега.

Интеграл Лебега и его дальнейшее обобщение — интеграл Данжуа — возникли в теории тригонометрических рядов в связи, как уже указывалось, с задачей придать более широкий смысл коэффициентам

Фурье. В этой теории и получила свои первые применения метрическая теория функций. Проиллюстрируем это двумя примерами.

Теорема Парсеваля — Ляпунова легко обобщается на измеримые функции с интегрируемыми по Лебегу квадратами (их мы будем иметь в виду, говоря о функциях с интегрируемыми квадратами). В 1910 г. была доказана в известном смысле обратная ей теорема Фишера — Рисса. *Если у тригонометрического ряда* (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)<\infty$, *то он сходится в среднем к функции с интегрируемыми квадратами* $f(x)$, *для которой он будет рядом Фурье* (и поэтому имеет место равенство Парсеваля (6)). Теоремы Парсеваля — Ляпунова и Фишера — Рисса полностью решают вопрос о представлении функций тригонометрическими рядами в смысле сходимости в среднем. Теорема Фишера — Рисса распространяется на любые ортогональные системы.

В качестве второго примера приведем классическую задачу Кантора о единственности разложений в тригонометрические ряды. Кантор показал, что конечные множества и некоторые счетные являются множествами единственности (U-множествами). С другой стороны, легко показать, что множества положительной меры — имеющие мощность континиум — являются M-множествами. В 1907 г. Юнг доказал, что все счетные множества являются U-множествами. Одно время предполагалось, что только счетные множества являются U-множествами. Поэтому сенсационным было в 1914 г. построение московским математиком Д. Е. Меньшовым примера *совершенного множества меры* 0 (имеющего континуальную мощность) *и являющуюся* U-*множеством*. А позднее Н. К. Бари построила пример совершенного множества меры 0, являющегося M-множеством, причем оказалось, что именно арифметические свойства множеств меры 0 определяют, являются ли они U- или M-множествами.

Наряду с метрической возникла и «дескриптивная» теория функций, не связанная с понятием меры. Она рассматривает, например, сходимость функции всюду. Р. Бэр нашел *необходимые и достаточные условия для того, чтобы разрывная функция была пределом непрерывных*; такая функция называется функцией 1-го класса (непрерывные функции будем считать функциями нулевого класса). Вообще *функцией* n-*го класса будем называть предел функций классов, меньших* n, *которые сами этим классам не принадлежат*. Эта классификация распространяется не только на классы конечного, но и трансфинитного порядка и их объединение есть множество функций, получаемых счетно-кратным переходом к пределу, исходя от непрерывных. Это объединение называется «борелевским телом» функций — наименьшее множество функций, инвариантное по отношению к операции предельного перехода. Все функции этих классов называются B-функциями. Им, согласно описанному принципу соответствия, отвечают B-множества. Долгое время считалось, что любые операции анализа не выводят за пределы классов B-функций и B-множеств.

В теории функций действительного переменного получили развитие те методы анализа, которые можно назвать «конструктивными». Понятие меры, например, исходит из меры отрезка, распространяет его на другие элементарные объекты, получаемые из отрезков их суммированием и вычитанием. Наложение предельного перехода на эти элементарные конструкции приводит к понятию меры для очень общих и сложных множеств. Для теории функций характерно сочетание элементарных конструкций с усложняющим предельным переходом. Теория функций и ее методы широко проникли во все разделы анализа.

В первом десятилетии XX века оформилось еще одно направление теории функций —«теория приближений» или по терминологии С. Н. Бернштейна — «конструктивная теория функций» (конструктивная — в смысле алгоритмическая, не в указанном выше смысле). Как известно, П. Л. Чебышёв был создателем теории многочленов наилучшего приближения. «Уклонением» функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на $[a, b]$ он называл $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - \varphi(x)|$ (то, что теперь называют метрикой C), многочленом наилучшего приближения степени n — тот из многочленов степени n, чье уклонение от данной функции наименьшее). В 1885 г. Вейерштрасс доказал теорему о том, что всякая непрерывная на $[a, b]$ функция есть предел сходящихся к ней равномерно многочленов. Эти работы были исходными для теории приближений, основоположниками которой были в первую очередь С. Н. Бернштейн, а также Валле-Пуссен, Джексон и др.

Классифицируя непрерывные функции по скорости сходимости к ним многочленов наилучшего приближения, С. Н. Бернштейн выделил, в частности, класс аналитических функций вещественного переменного, а также более общие классы «квазианалитических функций», в пределах которых сохраняется однозначность продолжения. Другие классы квазианалитических функций были построены Карлеманом и Данжуа. Так в современном анализе нашла свое место «непрерывность» математиков XVIII века в смысле однозначной продолжаемости.

4. Теоретико-множественная концепция. Мы остановились подробнее на теории функций действительного переменного потому, что с нее началось формирование Московской математической школы. Одновременно с ней развиваются другие новые направления математической работы, опирающиеся на теории множеств.

В первые десятилетия XX века во всей математике восторжествовала теоретико-множественная точка зрения, рассматривавшая как объекты различных разделов математики классы множеств, между элементами которых установлены того или иного рода соотношения. В геометрии эта точка зрения была подготовлена ее эволюцией в XIX веке — созданием неевклидовых геометрий и других геометрических систем, n-мерных геометрий и т. д. Теоретико-множественная точка зрения рассматривает геометрические системы как множества объектов, между которыми установлены соотношения, обобщающие соотношения обычного пространства. Основные соотношения образуют аксиоматику данного класса геометрических объектов — «пространств».

Аналогично в алгебре теоретико-множественная точка зрения была подготовлена обобщением понятия числа, созданием таких алгебраических объектов, как группы, кольца, поля, линейные системы и т. д., над элементами которых производятся операции, в каком-то смысле обобщающие алгебраические операции над числами. Теоретико-множественная точка зрения в алгебре рассматривает эти объекты как множества, над элементами которых производятся операции, сохраняющие некоторые свойства алгебраических операций над числами; основные свойства этих операций устанавливают аксиомы соответственных классов объектов. Теоретико-множественная точка зрения привела к универсализации аксиоматического метода.

С расширением математического материала объединяющие концепции строились на все более высоком уровне абстракции. Для математики конца XIX и начала XX веков этим уровнем был «уровень теории множеств».

На базе теории множеств происходило переосмысливание отдельных математических дисциплин, обобщение их основных понятий. Это обобщение расширило возможность их применения; методы и понятия одних математических дисциплин стали переноситься в другие.

Так, понятие меры и интеграла Лебега были перенесены в теорию топологических групп, в теорию вероятностей и другие математические дисциплины. Это было бы сделать гораздо трудней на уровне интеграла, например, Римана и более узких понятий меры [1]).

Обобщение основных понятий алгебры и геометрии привело к широкому проникновению их методов в разные области математики. Так в *математике XX века наряду с тенденциями к дифференциации проявились и синтетические тенденции.*

Поучительной является история московской теоретико-множественной математической школы. Возникнув в 10-х годах как школа теории функций действительного переменного, она довольно быстро «овладела» методами работы в самых различных областях математики. При этом целый ряд своих достижений она имела на стыке разных математических дисциплин.

Заметим в заключение, что теория множеств возникла в связи с возвращением к основам анализа, что ее концепции проникли в другие науки в связи с возвращением к их основам, и вместе с тем она поставила задачу возвращения к собственным основам.

Уже вскоре после появления основополагающих работ Кантора выявились «антиномии теории множеств». Их анализ показал, что требуется осторожность при перенесении рассуждений, законных для конечных множеств, на бесконечные. С другой стороны, трудности, возникшие при доказательстве континуум-проблемы и других родственных задач, потребовали критического пересмотра самого понятия «доказать». В десятых годах среди работников теории функций и теории множеств возникли споры о законности применения некоторых видов доказательства для бесконечных

[1]) Заметим, что уже переход от одномерного интеграла к кратным на уровне интеграла Лебега проще, чем на уровне интеграла Римана (недавно Г. Е. Шилов в читаемом им курсе анализа в МГУ произвел в этом направлении удачный эксперимент построения такого курса).

множеств. Наконец, развитие аксиоматического метода поставило задачу аксиоматизаций теории множеств. Возникшие таким образом вопросы основания теории множеств оказались вопросами наиболее глубоких оснований математики в целом, это стимулировало развитие математической логики. Д. Гильберт, чьи исследования по основаниям геометрии явились образцом аксиоматического исследования, впоследствии явился основоположником «теории доказательств».

5. Некоторые новые направления математической работы. Указанные тенденции — к обобщению основных понятий, возникновению новых более общих направлений математической работы, к созданию синтетических концепций — мы проиллюстрируем на нескольких примерах из области геометрии и анализа. Обобщение основных геометрических понятий завершилось созданием *абстрактных пространств*, аксиоматика которых сохраняет лишь минимальное число наиболее общих свойств обычных пространств. Первым было появление в 1904 г. *метрических пространств* (М. Фреше). Это множества, для каждой пары a и b элементов («точек») в которых установлено понятие «расстояния» — числа $\rho(a, b)$, удовлетворяющего трем аксиомам: 1) $\rho(a, b) \geqslant 0$, причем $\rho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$; 2) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$; 3) $\rho(a, c) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c)$ (аксиома треугольника). В метрических пространствах установлен закон предельного перехода (именно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ означает: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a, a_n) = 0$). Позже (у Ф. Рисса, 1909 г.) появляются более общие *«топологические» пространства*, у которых установлена лишь «топология», т. е. законы предельного перехода.

Абстрактные пространства охватили как все ранее появляющиеся «классические» геометрические системы, так и *«функциональные пространства»*, элементами которых являются функции, кривые, последовательности.

Чебышёв, исследуя приближения функций многочленами и другими элементарными функциями, вводил разные числовые характеристики близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на $[a, b]$: уклонение (см. выше); среднеквадратическое — с весом $\rho > 0$, т. е. $\sqrt{\int\limits_a^b (f-\varphi)^2 \rho dx}$; среднее по абсолютной величине, т. е. $\int\limits_a^b |f-\varphi|\, dx$. Все эти характеристики могут рассматриваться как расстояния между функциями (по современной терминологии Чебышёв пользовался метриками C, $L_{2,\rho}$, L). Множества функций с такой метрикой образуют основные функциональные пространства.

Расширение объектов геометрических исследований выразилось также в том, что и в пределах более обычных пространств *стали рассматриваться не только «классические образы»* — многогранники, «гладкие» линии, поверхности, многообразия, *но и более общие множества точек.*

Наряду с классическими преобразованиями точечных множеств появились и более общие. Как показал Г. Кантор, произвольные взаимно однозначные преобразования «разрушают» такие основные свойства геометрических объектов, как число измерений.

Для геометрии больший интерес представляют *топологические преобразования*, т. е. взаимно однозначные и взаимно непрерывные. Г. Кантор формулировал теорему о том, что кубы разного числа измерений не могут быть топологически преобразованы друг в друга. Но его доказательство было неполным; полное доказательство провел Броуер лишь в 1913 году.

Топология — раздел, геометрически изучающий топологические инварианты, т. е. свойства точечных множеств, сохраняющихся при топологических преобразованиях,— оформилась как самостоятельная дисциплина на рубеже XIX и XX веков. Но отдельные топологические факты были известны давно. Особо следует отметить роль Римана как предшественника современной топологии. Исследуя связи между поведением аналитической функции и топологическим характером ее «Римановской поверхности», Риман дает топологическую классификацию двусторонних замкнутых поверхностей (а позже Мёбиус и Листинг открыли существование односторонних поверхностей). В набросках по n-мерной топологии Риман вводит такие ее важнейшие понятия, как гомология, числа связности разного числа измерений (названные впоследствии «числами Бетти»). С гениальной прозорливостью Риман усмотрел некоторые глубокие факты, например, что при выкидывании из n-мерного многообразия k-мерного цикла или уменьшается на 1 $(n-k)$-мерное «число Бетти» или увеличивается на 1 $(n-k-1)$-мерное. Друг Римана Бетти выпустил в 1871 г. первое систематическое исследование по n-мерной топологии. От Пуанкаре ведет свое начало так называемая комбинаторная топология. Она рассматривает n-мерные многообразия как склеенные из «кирпичиков» n-мерных «искривленных» симплексов (при $n = 1, 2, 3$ — отрезков, прямоугольников, тетраэдров) или как «разбитые» на симплексы. Комбинаторная топология широко использует алгебраические методы для описания этой «склейки» и для выделения вытекающих из нее топологических инвариантов.

В то же время развивалась и идущая от Г. Кантора «теоретико-множественная» топология, изучавшая топологические свойства произвольных точечных множеств в обычных n-мерных пространствах, а затем — и в абстрактных (и сами абстрактные пространства). Заметим, что для доказательства независимости комбинаторных инвариантов от «триангуляции» (т. е. разбиения на симплексы) требуются методы теоретико-множественной топологии. Она изучала такие общие свойства точечных множеств, как связность, замкнутость, компактность и т. д. Как одна из основных задач теоретико-множественной топологии возникла задача построения теории размерности — классификации множеств по числу измерений.

Заметим, что с классических работ П. С. Урысона по теории размерности 1921—1922 гг., заложивших основы теории размерности, начала свое существование московская топологическая школа. Ей предстояло провести синтезирующую работу по слиянию обоих направлений в топологии, развитию топологической алгебры и топологических методов анализа.

Добавим, что анализ не мог ограничиться «правильными» образами комбинаторной топологии, потому что предельный переход мог превратить их в сложные объекты «теоретико-множественной». С другой стороны, он не мог ограничиться и n-мерными объектами: синтезирующие тенденции математики XX века сказались в создании и во все более широком использовании бесконечномерных функциональных абстрактных пространств.

На грани XIX и XX веков — под влиянием развития прежде всего теории интегральных уравнений и переосмысливания вариационного исчисления — возникают в анализе синтетические концепции *функционального анализа* — у Вольтерра, Адамара. Эти концепции рассматривают не индивидуальные функции, а классы функций и операции анализа, например, дифференцирование, интегрирование и всякие их комбинации — как преобразования таких классов. Эти классы было естественно трактовать как функциональные пространства (отметим, что Фреше, который ввел метрические пространства, был учеником Адамара, в школе которого и возникла концепция функциональных и абстрактных пространств). Источником функционального анализа было развитие анализа, алгебры и геометрии.

Так, вариационное исчисление, возникшее в XVIII веке, имело уже дело с расширением понятия функции —«функции от линии» или функционала — и давно уже была замечена аналогия между вариацией функционала и дифференциалом функции. Вариационное исчисление, которое «выпирало» за рамки «классического анализа», нашло себе место с созданием функционального анализа — как его глава — *общее дифференциальное исчисление*. Оно включает как простейший n-мерный случай обычное дифференциальное исчисление функций n-переменных.

Аналогия между ортогональностью векторов (сумма произведений координат равна нулю) и ортогональностью функций (интеграл от произведений равен нулю) отражена в самой терминологии. Разложению вектора по ортогональной системе векторов отвечает разложение функций по ортогональной системе функций. Такая же связь — с переходом от сумм к интегралам — между расстоянием в n-мерном евклидовом пространстве и квадратическим отклонением функций. Она привела к созданию так называемого *гильбертова функционального пространства*, в котором расстояние есть среднеквадратическое отклонение, сходимость в среднем, и в котором «полные ортогональные системы» играют роль ортогональной системы координат, коэффициенты Фурье — координат, при этом равенство Парсеваля есть аналог теоремы Пифагора.

Развитие теории линейных дифференциальных и создание теории линейных интегральных уравнений Фредгольма, которая оказалась более близкой к теории систем линейных алгебраических уравнений, привела к созданию охватывающей все эти теории общей *теории линейных операторов*. Особенную роль в развитии этой теории сыграла аналогия между теорией собственных значений матриц и собственных значений для дифференциальных и интегральных операторов. В работах Д. Гильберта 1908—1910 гг. теория линейных интегральных уравнений перерастает в теорию линейных операторов.

Конечно, лишь углубленное изучение основных понятий «обычного» анализа позволило переносить их на объекты более широкой природы — функциональный анализ строился на базе теории функций. При исследовании важнейших классов функций, превращавшихся в функциональные пространства (в работах, например, Ф. Рисса) *теория функций превращалась в функциональный анализ.* Так, гильбертово пространство квадратической сходимости в среднем не могло ограничиться непрерывными функциями, но должно было включить все функции с интегрируемыми по Лебегу квадратами как пределы в смысле такой сходимости непрерывных. Наконец, характерный для функционального анализа предельный переход от алгебраического, конечномерного случая к бесконечномерному связан с применением интеграла Стилтьеса и его обобщений.

С появлением функциональных пространств возник принципиально новый геометрический метод в анализе: *любая геометрическая теорема* из области, например, топологии или теории выпуклых тел и т. п., *перенесенная в функциональное пространство, превращалась в теорему анализа.* Таким образом, с одной стороны, были найдены доказательства новых теорем, а с другой — была внесена геометрическая наглядность в аналитические теории, что позволило иногда угадывать новые факты.

Проиллюстрируем это на двух примерах. Неподвижной точкой при непрерывном преобразовании $Y = F(X)$, относящем точке X множества M другую его точку Y, называется та точка X, для которой

$$X = F(X). \tag{7}$$

В топологии были доказаны несколько теорем о неподвижных точках. Так, в 1905 г. рижский математик Боль доказал *существование неподвижной точки при всяком непрерывном преобразовании выпуклого n-мерного тела M в себя*; позже эта теорема была передоказана Броуером.

Если $Y = F(X)$ означает векторную запись такого преобразования, а в координатной форме она записывается в виде $y_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то теорема Боля — Броуера утверждает существование в M решения уравнения (7) или в координатной записи — системы уравнений

$$x_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Теоремы о неподвижных точках, например, Боля — Броуера, *перенесенные в функциональное пространство, превращаются в теоремы существования функциональных уравнений*: дифференциальных, интегральных и т. п.

Другой пример. *Критической точкой* функции f называется точка, где ее дифференциал обращается в 0: $df = 0$. На поверхности сфер и вообще поверхностях рода 0 (ей гомеоморфных) легко построить функции, имеющие лишь две критические точки — минимума и максимума. На остальных замкнутых поверхностях существуют три, по крайней мере, критические точки у каждой функции. Оказалось, *наименьшее возможное число критических точек на поверхности или, общée, многообразии зависит от его топологической структуры.*

При переходе от обычных многообразий к функциональным пространствам функции переходят в функционалы, критические точки в экстремали соответственной вариационной задачи.

Пуанкаре поставил в 1905 г. задачу доказать, что *на всякой выпуклой поверхности S существуют три, по крайней мере, замкнутые геодезические* *линии*, т. е. три экстремали вариационной задачи для функционала — длины кривой, определенного в функциональном пространстве $\mathfrak{M}$ всех замкнутых кривых на S. Число решений подобных вариационных задач зависит от топологических свойств функционального пространства кривых, на котором определен данный функционал. Биркгоф доказал в 1917 г. *существование одной, по крайней мере, замкнутой геодезической линии на выпуклой поверхности*, изучив некоторые топологические свойства функционального пространства $\mathfrak{M}$. Более глубокое изучение топологической структуры функциональных пространств из кривых, на поверхностях и многообразиях позволило решить задачу Пуанкаре, а позже ряд других подобных вариационных задач.

Заметим в заключение, что гильбертово пространство и другие линейные функциональные пространства, подобно n-мерным векторным, являются линейными системами — *алгебраическими образованиями*, между элементами которых установлены операции сложения и умножения на константу. Множества линейных операторов, преобразующих данное линейное пространство в себя, дают пример пространств с более богатой алгеброй — для двух операторов определено их произведение (последовательное применение). Это линейное пространство является также кольцом. В нем можно определить многочлены от операторов. С помощью предельного перехода удается переходить от многочленов к более общим функциям операторов. По-разному это делается в матричном исчислении, операционном исчислении, спектральной теории операторов гильбертова пространства.

В функциональном анализе, соединившем методы анализа, геометрии и алгебры, ярко сказались синтезирующие тенденции математики XX века.

Сейчас, когда основы теории множеств, теории функций и функционального анализа стали предметом университетского преподавания, желательно более глубокое историческое исследование возникновения этих и родственных им современных математических дисциплин.

2. Предыстория и возникновение Московской теоретико-функциональной школы

В предыстории Московской теоретико-функциональной школы надо отметить роль Б. К. Млодзиевского, который на рубеже XIX и XX столетий стал впервые читать в Московском университете лекции о теории множеств и теории функций. В числе его слушателей были и профессора, например, Д. Ф. Егоров, и тогдашние студенты. (Замечу, что русская терминология по теории множеств и теории функций создана Б. К. Млодзиевским.) В 1902 г. к нему присоединился И. И. Жегалкин.

В. В. Голубев вспоминает в биографии Н. Н. Лузина [1]) о своих и его студенческих годах (1902—1906 гг.), когда среди студенческой молодежи

[1]) Н. К. Бари и В. В. Голубев «Николай Николаевич Лузин» (Н. Н. Лузин «Интеграл и тригонометрический ряд», М.—Л., Гостехиздат, 1951).

был силен интерес к вопросам теории множеств. Б. К. Млодзиевский уже начал жаловаться, что математическая молодежь слишком долго останавливается «на основах», и пора уже перейти к «более высоким областям анализа»— уравнениям в частных производных, дифференциальной геометрии и т. д. Однако пришлось сначала перейти в теории множеств и теории функций от «интереса» к активной научной работе в них. Лишь позже в Московском университете началась интенсивная работа в области дифференциальных уравнений. Б. К. Млодзиевский дожил до расцвета в МГУ школы теории функций, но не дожил до расцвета более «высоких» областей анализа.

В 1907 г. состоялась в университете защита диссертации И. И. Жегалкина «Трансфинитные числа». Она была, очевидно, первой книгой по теории множеств на русском языке.

Помню, мне в мои школьные годы, когда я имел лишь поверхностные знания элементов анализа, попалась книга Жегалкина, и я по ней ознакомился с основами теории множеств. Какое потрясающее впечатление произвела тогда эта первая встреча с ней, гигантское шествие алефов и трансфинитов! Теперь, когда основы теории множеств вошли в университетские учебники, когда они превратились в часть обязательной программы, сдаваемой на экзаменах, они потеряли, по всей вероятности, значительную часть своей романтической увлекательности.

Первой значительной работой в Москве по теории функций и действительного переменного была теорема Егорова,— вошедшая в учебную литературу,— о том, что *любой сходящийся функциональный ряд путем отбрасывания множества сколь угодно малой меры превращается в равномерно сходящийся ряд.* Учениками Д. Ф. Егорова были представители старшего поколения Московской школы теории функций и действительного переменного: Н. Н. Лузин, В. В. Голубев, И. И. Привалов, В. В. Степанов.

С 1912 г. стали выходить из печати работы Н. Н. Лузина по теории функций, которые потом были объединены в его диссертационную работу «Интеграл и тригонометрический ряд», защищавшуюся им в 1915 г. на степень магистра. В виде исключения, Н. Н. Лузину была сразу присуждена степень доктора наук.

Приведем некоторые из результатов, вошедших в эту диссертацию: так называемые «*C-свойства*» *измеримых функций — каждую такую функцию можно сделать непрерывной*, *изменив ее значение на множество сколь угодно малой меры*, теорема *о существовании у каждой измеримой почти всюду конечной функции* $f(x)$ *примитивных* $F(x)$, *для которых почти всюду* $F'(x) = f(x)$ (заметим, что если функция $f(x)$ разрывна, то можно лишь говорить об этом равенстве почти всюду); при этом оказывается, что существует *целый класс примитивных* у каждой такой функции, *отличающихся не на константу.* Лузин ставит задачу выделения *среди* этого множества примитивных той, которая «наиболее тесно» связана с данной функцией и *которую естественно считать ее неопределенным интегралом.* Для суммируемых функций (интегрируемых по Лебегу) *неопределенный интеграл Лебега выделяется среди примитивных как кривая наименьшей длины*; дается характеристическое определение и для интеграла Данжуа. Среди результатов по теории тригонометрических рядов укажем на следующий, например: *если тригонометрический ряд сходится абсолютно для двух несоизмеримых значений* $x = \alpha, \beta$, *то он или сходится почти всюду или расходится почти всюду.*

В 1914 г. Лузин начал работать в университете в качестве доцента, а в 1916 г.— в качестве профессора. В 1914—1916 гг. вокруг него сформировался активный научный коллектив, куда вошли его младшие товарищи: И. И. Привалов и В. В. Степанов и тогдашние студенты Д. Е. Меньшов, А. Я. Хинчин, В. С. Федоров, М. Я. Суслин, П. С. Александров, В. И. Вениаминов и др. В позднейшей литературе по истории московской математики эту группу математиков называют «первым поколением Лузитании». Первые работы этой группы математиков относились к метрической теории функций (работы Д. Е. Меньшова о единственности тригонометрических рядов и А. Я. Хинчина по теории интеграла Данжуа) и ее применениям к теории аналитических функций. В 1917 г. к этой группе присоединился студент П. С. Урысон.

В 1915—1916 гг. впервые начал работать под руководством Н. Н. Лузина семинар по дескриптивной теории функций, сыгравший важную роль в развитии московской математики. Участник семинара студент П. С. Александров, решая поставленную Лузиным задачу, доказал, что *всякое несчетное B-множество содержит совершенное ядро* и, следовательно, *имеет мощность — континуум.* При этом он употребил особую конструкцию, позволяющую получать все B-множества. Другой студент — участник этого семинара — М. Я. Суслин показал, что эта конструкция дает гораздо более широкий класс множеств, чем B-множества, названный им *классом A-множеств.* Суслин доказал ряд основных свойств теории A-множеств: *существование совершенного ядра* и, следовательно, континуальную мощность. Лузин показал, что *всякое A-множество есть множество значений некоторой функции — предела для непрерывных.* Таким образом, существовавшее мнение, что операции анализа приводят лишь к B-множествам и B-функциям, было опровергнуто; границы анализа оказались шире.

М. Я. Суслин (1894—1919) родился в крестьянской семье в Калужской губернии. В 1913—1917 гг. он был студентом Московского университета; в 1917 г. оставлен в университете. В 1919 г. он во время поездки на родину заболел сыпным тифом и скончался. М. Я. Суслин при жизни успел опубликовать лишь одну заметку (в Докладах Парижской академии). Но он оставил большой след в истории математики: существует огромная литература по A-множествам (или, как их называют, «суслинским множествам»). Именно здесь московская теория функций вышла за пределы традиционной тематики французской школы и обрела собственную тематику. Для нас — математиков «второго поколения Лузитании», не заставших М. Я. Суслина в живых, он представлялся легендарной фигурой.

В годы мировой войны 1914—1918 гг. в Москве находился польский математик В. Серпинский, интернированный как австрийский подданный, но оставленный в Москве по ходатайству московских математиков. Несколько совместных работ Лузина и Серпинского были опубликованы в 1917—

1918 гг. Впоследствии Серпинский возглавлял польскую школу теории множеств.

Приведем в заключение выдержку из перечня докладов в Московском математическом обществе (в скобках помечена дата доклада).

1907

1. И. И. Жегалкин «О трансфинитных числах» (20/III).
2. Н. Н. Лузин «О канторианских антиномиях» (1/V).

1911

3. Д. Ф. Егоров «О сходимости последовательностей функций» (25/I).
4. Д. Ф. Егоров «О точках перерыва измеримых функций» (15/III).

1912

5. Студент И. И. Привалов «О свойствах рядов по ортогональным функциям» (10/XI).

1913

6. И. И. Жегалкин «Исчисление предложений» (первый доклад по математической логике) (22/X).

1914

7. Н. Н. Лузин «О почленном интегрировании тригонометрических рядов» (10/XII).
8. Д. Е. Меньшов «Взаимоотношения определений интеграла Бореля и Данжуа» (10/XII).

1915

9. Студент А. Я. Хинчин «Обобщение теоремы Рисса о последовательностях измеримых функций» (14/I).
10. В. В. Степанов «О методе Линделефа и теореме Пикара» (17/II).
11. Н. Н. Лузин «О двух новых результатах в теории множеств и в теории тригонометрических рядов (о работе М. Я. Суслина и о примере Д. Е. Меньшова u-множества континуальной мощности)» (20/X).
12. Н. Н. Лузин «О характере сходимости тригонометрических рядов Фурье» (15/XII).

1916

13. В. К. Серпинский «О кривой, содержащей в себе образ всякой кривой» (10/I).
14. И. И. Привалов «О сходимости рядов Штурма — Лиувилля и Лежандра» (16/II).
15. А. Я. Хинчин «Обобщение интеграла Данжуа» (19/IV).
16. Н. Н. Лузин «Множества, измеримые по Борелю» (14/X).
17. Д. Е. Меньшов «О единственности разложений в тригонометрический ряд» (18/X).

1917

18. В. К. Серпинский «О роли аксиомы Цермело в анализе и теории множества» (21/VIII).

Научная и учебная жизнь в МГУ не прерывалась в трудные первые послереволюционные годы. Читались лекции, сдавались аспирантские («магистерские») экзамены (в 1921 г. закончили их сдачу П. С. Александров и П. С. Урысон), собиралось Математическое общество; продолжавшаяся научная работа по теории функций действительного переменного и применении ее методов в теории функций комплексного переменного отражена в ряде докладов на Математическом обществе за 1918—1920 гг.:

1918

1. В. С. Федоров «О значениях аналитической функции в особых точках» (17/XI).
2. Н. Н. Лузин «О единственности аналитической функции» (17/XI).
3. В. Н. Вениаминов «Задача Каратеодори о конформном отображении» (18/XII).

1919

4. Д. Е. Меньшов «Об извилистости совершенных множеств» (19/I).
5. Н. Н. Лузин «Расширение теоремы Фату» (15/V).
6. А. Я. Хинчин «Опыт обоснования теории интегралов Данжуа без трансфинитов» (15/V).
7. Д. Е. Меньшов «Неголоморфные интегралы дифференциальных уравнений 1-го порядка» (19/VI).

1920

8. П. С. Урысон «Об одной задаче Каратеодори» (16/V).
9. В. В. Степанов «О последовательностях, сходящихся и расходящихся на счетном множестве точек» (20/V).
10. Н. Н. Лузин «О применении конформного отображения к изучению функций действительного переменного» (20/V).
11. Н. Н. Лузин «О работе З. В. Фрумкиной относительно перечисления множества криволинейных букв» (19/IX).
12. Д. Е. Меньшов «О рядах по ортогональным функциям» (19/IX).
13. С. С. Ковнер «О точках неравномерной сходимости» (21/XI).

(Этот и предыдущий списки докладов составлены по статье П. С. Александрова и О. Н. Головина «Московское математическое общество», УМН **12**, вып. 6 (1957), 9—46.)

Мы видим, что математическая работа не только не прерывалась, но продолжала развиваться. (Заметим, что работа (8) П. С. Урысона, посвященная структуре границы односвязной области, была его первой топологической работой.)

В 1918—1920 гг. было открыто много вузов и факультетов в разных городах — где условия жизни были лучшими, чем в Москве и Петрограде, и куда переехала на работу значительная часть ученых обеих столиц. Так, В. В. Голубев и И. И. Привалов работали в Саратовском университете, в Трудах которого была опубликована монография Привалова «Интеграл Коши» (1918).

Многие ученые Москвы стали работать в Иваново-Вознесенском политехническом институте, организованном в 1918 г. по инициативе М. В. Фрунзе, который добился создания хороших по тем временам условий жизни и работы для научного персонала института. Среди факультетов института был педагогический с несколькими отделениями, в том числе и математическим.

В числе организаторов института был профессор строительной механики В. М. Келдыш и профессор теоретической механики А. И. Некрасов, который стал деканом машиностроительного факультета института, а затем ректором. Среди математиков были — Н. Н. Лузин, А. Я. Хинчин — декан математического отделения, В. С. Федоров, работающий в Иванове и поныне, Д. Е. Меньшов, В. Н. Депутатов. В. М. Келдыш рассказывал о переговорах с М. Я. Суслиным на предмет его работы в Ивановском институте. Они закончились письмом Суслина, в котором он сообщал о своей болезни, из которой он не надеялся «выкарабкаться»...

Ученые, переехавшие в Иваново, получили возможность публиковать свои работы в «Трудах Иваново-Вознесенского политехнического института».

Приведем выдержки из оглавлений первых пяти выпусков этих «Трудов», выход которых в 1919—1933 гг. несколько компенсировал перерыв в выпуске московских научных журналов; некоторые из приведенных работ докладывались в Москве в математическом обществе; в этом случае в квадратных скобках ставим дату доклада.

1919

1—2. В. С. Федоров «Непрерывность и моногенность» **1** (45—56 и 139—145).

3. Н. Н. Лузин «Sur la representation conforme» **2** (72—80).

4. А. И. Некрасов «О волне Стокса» **2** (81—89) [5.III.18].

1921

5. А. Я. Хинчин «Sur la theorie d'integral de M. Denjoie» **3** (49—51) [15.VI.19].

6. А. И. Некрасов «О волнах установившегося вида» **3** (52—65) [17.X.20].

1922

7. А. И. Некрасов «О прерывном движении жидкости вокруг препятствия в форме дуги круга» 5 (3—19) [17.IV.21].

8. Н. Н. Лузин «О существовании аналитических функций, равномерно бесконечных вблизи купюрки» 5 (20—26) [15.V.21].

9. А. Я. Хинчин «Об одном свойстве непрерывных дробей и его арифметических приложениях» 5 (27—41).

10. А. Я. Хинчин «К вопросу представления числа в виде суммы двух простых чисел» 5 (42—48) [16.II.19].

11. В. С. Федоров «О конформном отображении кругов с разрезами» 5 (49—59).